Java Appletを用いた初等代数関数の特性の3次元表示法

藤井　康寿・市川　雅洋[1]・中川　建治[2]

1．はじめに

近年，プレゼンテーションソフトの目覚しい進歩や投影するデジタルプロジェクターの小型化により，大学の講義形態は変貌しつつある。また，講義室には動的にLANのアドレス（IPアドレス）を割り付けることが可能な情報コンセントが整備され，ノート型パーソナルコンピュータを使用した情報教育が行われつつある。このようにソフト面での高機能化とハード面での整備の充実に対応する教授方法や講義資料の工夫が求められ，また，従来の講義形式の授業に加えて，「することから学ぶ（Learning by Doing）」といわれる体験学習にも注目が集まっている[(1)]。

著者らは工学分野で重要なクラック先端部の応力集中問題を取り扱うために複素変数zで構成される複素応力関数を活用している[(2)]。この解析関数はクラック近傍で分岐を持ち多価性を有することになるので，これを一価関数とするためには，第3章で詳細を説明するリーマン面と呼ばれる1次元複素多様体（3次元図形）の概念が必要になる[(3)]。分岐問題を工学的な応用例へ展開させる前に，その中に内在する数学的理論を簡単でしかも明瞭に説明する必要があり，学習者がWeb上でインタラクティブな操作で容易に理解できる教材開発の手法を提案することは重要である。

本研究では，数値数式処理ソフトウェアーの1つであるMathematica[(4)]を用いて，初等複素代数関数の特性の3次元描画を行う。Mathematicaによる図形は静的なものでしかないが，Martin Kraus[(5)]がフリーで提供している「LiveGraphics3D」というJava Appletを活用すると，ホームページ上でプログラムが起動しているような動的な描画手法を提供することが可能[(6)]となる。このClassを用いることで，3次元図形をWeb上で表示することが可能となり，同時に，回転や拡大・縮小，ステレオグラフィックスなど，マウスを動かすだけでインタラクティブな操作を行うことが可能となる。本研究では，数式で表されるような関数の特性に関して，フリーで提供されているJava Appletを用いてWeb上で3次元表示する手法の一提案を行うとともに，具体例として，複素代数関数の特性に関する3次元描画による検証を行ったので報告する。

2．Java Appletによる3次元図形の描画手順

Javaアプレットを用いた3次元図形の描画は，Martin Krausがホームページ上においてフリーで提供している「LiveGraphics3D」というJavaのアプレットを用いる。このアプレットはWebブラウザ上で動くJavaの小さなプログラムで，<APPLET>タグでくくられたサーフェースモデル形式で保存されたファイル名を，HTMLファイル内に記述することにより，「Webページ上でプログラムが起動している」ような状態を作り出してインタラクティブな操作を可能にする特徴をもつ。本研究では、上述のアプレットの作用形式になるように，Mathematicaを活用して3次元図形を描画した後，図1に示す生成手順に従いWeb上に曲面を描画する。

i）Mathematicaを用いて複素関数曲面の描画

↓

ii）サーフェースモデル形式[(7)]にデータ保存

↓

iii）Web Server　〈APPLET〉タグを用いたHTML形式内へ埋め込み

↓

iv）Web Browser　I.E.及びN.E.ブラウザーの表示

図1　Java Appletの生成手順

具体的に図1の生成方法で説明をすると，次のようになる。

i） Mathematica を用いて本研究で対象とする関数曲面を描画し，確認及び検証を行う。ただし，Mathematica で描画された3次元曲面は動きのない静的な図形である。

ii） i)で描画した曲面をサーフェースモデル形式となるように保存する。具体的に図2に示す6面立方体を例として示す。最初に各頂点の座標Vを計算し，各頂点間を結んだ稜線Eの情報を持つワイヤーフレームモデルを作成する。次にこのワイヤーフレームモデルに表裏の情報を与える面情報Fを付加してサーフェースモデルを作成する。サーフェースモデルは面の情報を持つことで，ワイヤーフレームモデルより高度な処理を可能とする。

iii） 〈APPLET〉 タグを用いたHTML形式内への埋め込み

HTML ファイル内に前述のサーフェイスモデルの構築手順に従って作成した3次元曲面のテキストファイル（ここではgr. txt）を呼び出すコードを以下のように記述する。このとき，Java Applet作用を発生するフリーで提供されている「LiveGraphics3D」内の「live. jar」も埋め込む。

```
<HTML>
〈P align= “center”〉〈APPLET ARCHIVE
  = “live. jar”
CODE= “Live. class” WIDTH=550
  HEIGHT=550〉
〈PARAM NAME=INPUT_FILE VALUE
  = “gr. txt”〉
〈/APPLET〉
〈/HTML〉
```

iv） Internet Explorer 等のブラウザーによりiii）で作成したHTMLファイルを呼び出して表示を行い，動作確認と検証を行う。

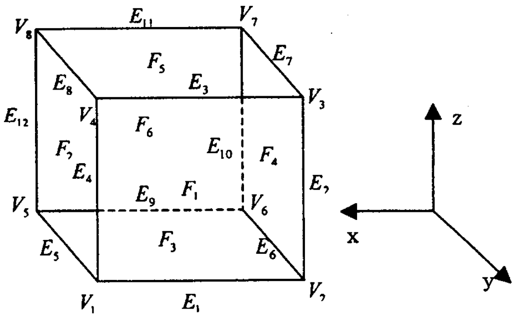


図2 3次元物体

3．活用する関数の定義と表示法

3．1．関数の表示法

本研究では Java Applet を用いた関数の3次元表示によるインタラクティブな操作性を検証するために，複素代数関数の3次元曲面及び特性の1つであるリーマン面 (8) と呼ばれる1次元複素多様体を図示する。

一般に複素関数 $w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ （w, z は複素数）は複素変数 z （$=x+iy$）に複素変数 $w=f(z)$ を対応させる複素1変数関数で，2つの実数 (x, y) に対して2つの実数 (u, v) を対応させる関係であるため，この関数のグラフは，

$$(Re\,z,\ Im\,z,\ Re\,w,\ Im\,w) = (x,\ y,\ u,\ v)$$

が作る実4次元空間を用意しなければならないが，4次元空間を描くことは困難であるため，4変数の中から3変数を選び関数の実数曲面Re，虚数曲面Im，及びRiemann面を描くこととする。各曲面を描画する3変数は，Re：$\{x, u, v\}$，Im：$\{y, u, v\}$，Riemann面：$\{x, u, v\}$ である。また，本研究で活用描画する複素関数は，最も簡単なべき乗関数（z^2, z^3, z^4）とべき根（$\sqrt{z}$, $\sqrt[3]{z}$, $\sqrt[4]{z}$）であり，u, v の関数の詳細を表1に示す。

表1 関数の詳細

	u	v
z^2	x^2-y^2	$2xy$
z^3	x^3-3xy^2	$3x^2y-y^3$
z^4	$x^4-6x^2y^2+y^4$	$4x^3y-4xy^3$
$\sqrt{z}$	$r^2\cos 2\theta$	$r^2\sin 2\theta$
$\sqrt[3]{z}$	$r^3\cos 3\theta$	$r^3\sin 3\theta$
$\sqrt[4]{z}$	$r^4\cos 4\theta$	$r^4\sin 4\theta$

3．2．1次元複素多様体であるRiemann面に関する説明

3．1節に示したRiemann面について，べき根 $w=\sqrt{z}$ を例に用いて説明する。この関数は z のある値に対して2つの異なる値 w_1 及び w_2（$w_2=-w_1$）が対応することから，2価関数である。

z が θ を0から 2π を経て 4π まで変化することを示すには，図3に示すように2枚の複素平面(1)，(2)を原点Oから正の実数軸に沿って切断し，(1)の切り口の下端と(2)の切り口の上端とを続け，(2)の下端と(1)の上端とを続けたものを考える。このような面の上で，例えば切断を入れた実軸上の点Aから出発して，曲面(1)を原点を中心として 2π 周る。すると実軸に達した時に，いつのまにか曲面(2)に移行している。さらに曲面(2)を 2π から 4π まで周り，実軸に達すると再び(1)の面に戻る。即ちAから出発して再びAに帰るために原点を2回周るのである。このように2枚の面を適当に接続して，その上の1つの点を w 面上の1つの点へ連続的にかつ一対一で結び付け，一価関数のように表現するような面を周知のようにRiemann面というが，多価関数を3次元曲面として描画しあらゆる視点からRiemann面の構成を観察するソフトによる初心者教育は重要であると考えられる。

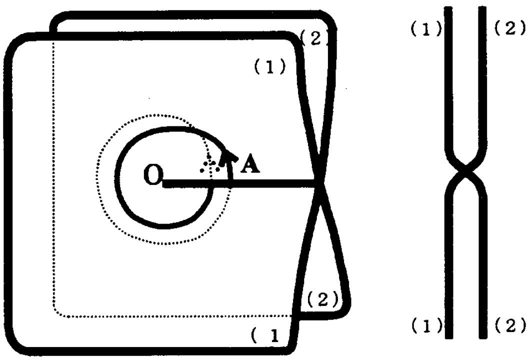


図3　$w=\sqrt{z}$ のRiemann面　(イメージ)

4．関数の3次元描画結果

Java Appletによって描いた3次元図形は，表2に示すインタラクティブな操作が可能となり，様々な視点からの観察ができるようになる。

表2　Java Appletの操作方法

マウスの操作	Java Appletの作用
左ドラッグ＋マウス移動	回転
左ドラッグ＋マウス移動→放す	回転を続ける
SHIFT＋左ドラッグ＋垂直移動	ズームイン・アウト
ドラッグ（右ボタン）	部分除去
"S"キー	ステレオ画像作成

ここではべき乗関数とべき根の代表的な曲面である $w=z^2$ の実数曲面と，$w=\sqrt{z}$ のRiemann面をMathematica及びJava Appletを用いて3次元描画し，それぞれの曲面の特性について述べることとする。

4．1．べき乗関数

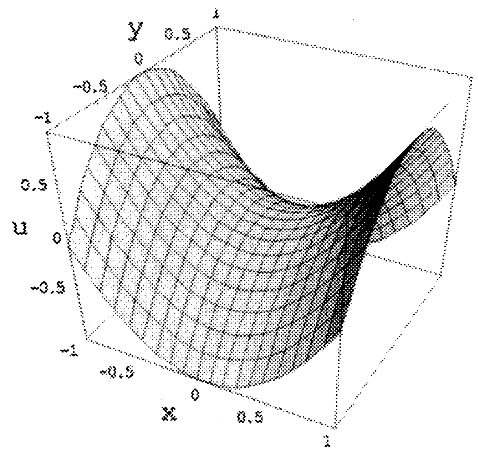
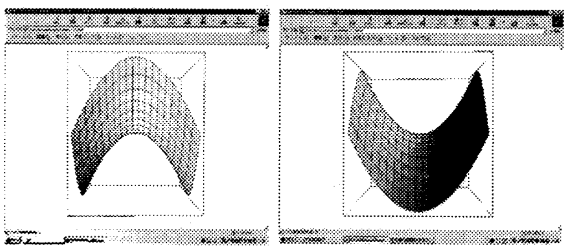


図4　$w=z^2$ の実数曲面 (Mathematica)



回転図

図5　$w=z^2$ の実数曲面 (Java Applet)

図4は $w=z^2$ の実数曲面をMathematicaを用いて描画した静的な図であり，この図をJava Appletで表示すると図5のようになる。この曲面は双曲放物面と呼ばれるものであるが，馬の鞍に似ているため，$x=0$，$y=0$，$z=0$ の点は鞍点と呼ばれる。上述のようにインタラク

ティブな操作が可能なJava Applet表示においては，曲面を自由に回転させて目的の状態を表示することが可能である。例えばxの値を固定しx軸に平行な方向から見ると上に凸の放物線が見え（図5の左図），yの値を固定しy軸に平行な方向から見ると下に凸の放物線を見ることができる（図5の右図）。したがって，この曲線にはある方向から鞍点に近づけば極大であり，別の方向から近づけば極小になるという特性があることを曲面の回転によって確認することが可能となる。

4．2．べき根

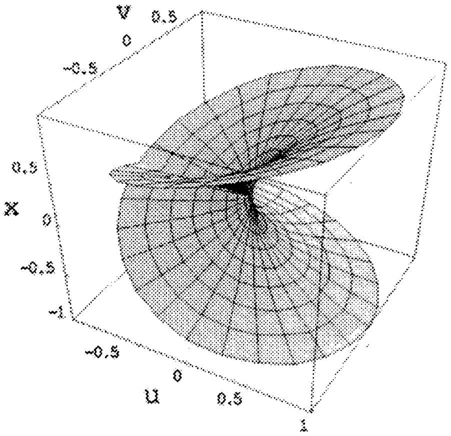
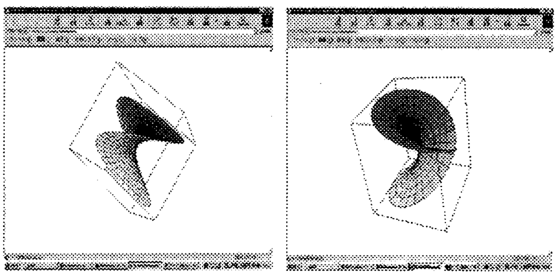


図6　$w=\sqrt{z}$ の Riemann 面（Mathematica）



回転図

図7　$w=\sqrt{z}$ の Riemann 面（Java Applet）

図6は$w=\sqrt{z}$のRiemann面をMathematicaを用いて描画した図であり，この図をJava Appletで表示すると図7のようになる。これらの図は，3.2節で説明したイメージを具現化した曲面であり，図を見ると曲面上を2回周って元の曲面に戻るリーマン面と呼称される1次元複素多様体曲面であることが認識できる。このような性質を有する点（この場合，原点）を代数分岐点と称する。

このように関数$w=\sqrt{z}$は，wを正の向きに1回転させるとzは連続的に変わることから，wは原点の周りを2回転して初めて元の位置に戻る「2価関数」の特性があり，同様に関数$w=\sqrt[n]{z}$は「n価関数」の特性がある。

5．まとめ

近年目覚ましく発展したインターネット上において，Java Appletを取り入れてインタラクティブな3次元表現を可能にする手法を提案した。具体的には数式で表されるような関数の特性を，サーフェースモデル形式に基づく3次元物体への変換をMathematicaを用いて作成し，さらに図形の情報をJava形式に保存する一連の手順をサブルーチン化したことである。数枚の描画例からその有用性を呈示することは困難であるが，ホームページ上に公開することにより，学習者がJava Applet上に描画された曲面を自由に観察することが可能となり，体験学習の効果も発揮されると期待できる。今後の検討課題としては，本研究で取り上げた題材・教材目的に限定することなく，Java Appletの特徴・利点を活かして数式で表されるような関数の，体験学習教材としての今後の活用性を広く見出すことが重要であろう。

註

1　所属は，豊橋市役所
2　所属は，名城大学理工学部

参考文献

(1) 白井宏明："体験学習のためのゲーミングシミュレーション教材の試作"，教育システム情報学会誌，Vol. 18, No. 1, pp. 34-41 (2001).
(2) 藤井康寿，中川建治："面内引張りを受ける境界面亀裂問題の応力関数"，土木学会論文集，No. 502/V-25, pp. 23-32 (1994).
(3) 殿塚勲・河村哲也："理工系の複素関数論"，東京大学出版会 (1999).

(4) 上坂吉則："Mathematica 数値数式プログラミング"，牧野書店，(2000).
(5) http://wwwvis. infomatik. uni-stuttgart. de/~karaus/LiveGraphics3D/
(6) 藤井康寿，竹下文規，中川建治："VRML を用いた初等超越関数の特性の３次元表示法"，東海女子大学紀要，第23号，pp. 227-231，(2004).
(7) 黒瀬能聿："3次元図形処理工学"，共立出版株式会社，pp2-5 (1999).
(8) 寺澤寛一："自然科学者のための数学概論"，岩波書店，(1959).