東海女子大学紀要　23（2003）

VRMLを用いた初等超越関数の特性の3次元表示法

藤井康寿・竹下文規[1]・中川建治[2]

1．はじめに

近年、パーソナルコンピュータの急激な進歩と情報通信関連技術の発展と普及により、インターネットは爆発的に一般社会に普及した。これはWWWの登場とHTMLによるホームページ構築の手軽さから、画像やアニメーションなどの2次元画像、あるいはJava、JavaScript言語を活用して様々な仕掛けを組み込むことが可能となり、2次元世界をWeb上に表現することが可能になったためである。しかし、一方でインターネット上での3次元データ活用への需要も高まりつつあり、HTMLを用いた表現手法の限界も指摘されている。

VRML(Virtual Reality Modeling Language)はインターネット上において3次元のバーチャルワールド（仮想現実世界）を構築するためにISOの国際標準として認証されたプログラミング言語の一つである[1]。VRMLファイルはHTMLと同様にテキスト形式でプログラミングすることができ、ノードと呼称されるコード（仕様）に沿って記述することで3次元オブジェクトを制作することができる。すなわち、制作環境や表示環境には特別なものを必要としない。インターネット上でフリーで提供されているVRML対応のブラウザとテキストエディタさえあれば3次元オブジェクトの制作と表示が可能である点が大きな特徴である。また、VRMLで構築された3次元コンピュータグラフィックス(Web 3 D)によるオブジェクト内を、学習者はいろいろな角度から観察したり、動かしたり、3次元仮想空間内を歩き回るといったインタラクティブな操作も可能である[2]。さらに、これまでに指摘されてきた問題として、3次元曲面などのファイル容量が膨大となるために、コンピュータのフリーズやホームページ上への掲載不可などの諸問題を解消することも可能である。これは次章の2.1節で詳述するサーフェースモデル形式で保存することにより、3次元曲面ファイルを最大で数十分の一の大きさのファイル容量に抑えることができるためである。

著者らは複素変数zで構成される複素解析関数を工学分野で重要なクラック近傍の応力集中問題を取り扱うために活用している[3]。この解析関数は分岐を持ち、多価性を有することになるので、これを一価関数とするためには、Riemann面と呼ばれる1次元複素多様体（3次元図形）の概念が必要になる[4]。関数曲面を工学的な応用例へ適用する前に、その根底に内在する数学的理論や特性を簡単でしかも明瞭に図示する手法を提案することは極めて教育的であろう。また、学習者が数式でしか表されていないような関数特性に関して、前述のVRMLを活用してWeb 3 Dの構築を行い、マウスによるインタラクティブな操作を実現することで、体験学習の効果も期待できるものと推察される。

本研究では数式で表されるような関数の特性を、VRMLを用いてWeb上で3次元表示す

る手法の一提案を行い、その具体例として初等複素超越関数の特性のVRML表示と考察及び検証を行ったので報告する。

iii） VRML形式の３次元曲面をVRML対応ブラウザ上に表示し、動作確認及び体験学習への効果などの検証する。

２．VRMLによる３次元図形の描画手順

VRMLを用いて描画される３次元曲面は図１に示す手順で作成されることになる。

i）Mathematica[5]による３次元曲面の描画
↓
ii）サーフェースモデル形式に対応した頂点・稜線・面リストの選出およびVRML形式に変換（2.1節を参照して保存）
↓
iii）フリーで提供されているCosmoPlayer[6]などのブラウザによる表示及び検証

図１　３次元曲面の作成手順

i） 数値数式ソフトウェアの１つであるMathematicaを用いて、本研究において対象とする関数の３次元曲面を描画し、確認及び検証を行う。ただし、Mathematicaで描画した３次元曲面は動きのない静的な図形である。

ii） 描画した曲面からサーフェースモデル表示[7]方法に必要な頂点・稜線・面を選出し、VRML形式に変換して保存する。サーフェースモデル構造については図２及び図３を用いて次節で詳述する。

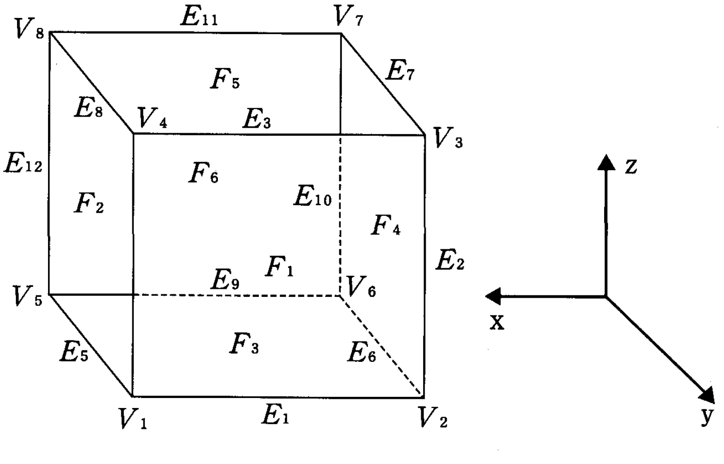

図２　３次元物体

２．１．サーフェースモデルの構築法

本研究で表現する３次元物体の表現方法のデータ構造はサーフェースモデルである。

サーフェースモデルは図２に示すように１辺が３の６面立方体に頂点を設定して各頂点に番号を設け（頂点リスト；V_1～V_8）、それらの頂点番号を選択することによってコンピュータに稜線を認識させ（稜線リスト；E_1～E_{12}）、稜線をつないで面の表裏情報を付加（面リスト；F_1～F_6）することにより、多角形の面を構成して３次元物体を作成する方法である。VRMLプログラムにおいてサーフェースモデルによる３次元物体の描画を実現するノードとしてIndexedFaceSetノードがある。しかし、本研究において数式で表されるような関数の特性を３次元曲面として描画するには、膨大な頂点・稜線・面情報が必要となり、手動で作成することは困難である。本研究ではサーフェースモデル作成に係る情報（頂点・稜線・面）をMathematicaにより選出し、VRMLに対応するノードへ変換

頂点リスト

V	x	Y	z
1	3	3	0
2	0	3	0
3	0	3	3
4	3	3	3
5	3	0	0
6	0	0	0
7	0	0	3
8	3	0	3

(a) ３次元座標値

稜線リスト

E	始点	終点
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	1
5	1	5
6	2	6
7	3	7
8	4	8
9	5	6
10	6	7
11	7	8
12	8	5

(b)頂点番号(a)へのポインタ

面リスト

F	頂点番号			
1	1	2	3	4
2	1	4	8	5
3	1	5	6	2
4	3	2	6	7
5	4	3	7	8
6	5	8	7	8

(c)頂点番号(b)へのポインタ

図３　頂点・稜線・面リスト

する一連の手順をサブルーチン内で実現した。

3．活用する解析関数と表示方法

本研究で活用する関数は表1に示す複素変数zで表される初等超越関数である。

表1　各種関数

$\omega=f(z)=u+iv$	u	v
指数関数e^z	$e^x\cos y$	$e^x\sin y$
三角関数$\cos^z$	$\cos x\cosh y$	$\sin x\sinh y$
対数関数$\log^z$	$\log\sqrt{x^2+y^2}$	$\tan^{-1}(y/x)$

表1に示す関数において複素数 $z=x+iy$ を用いるため、その値は $\omega=f(z)=u+iv$ となり、

$(\mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z, \mathrm{Re}\omega, \mathrm{Im}\omega)=(x, y, u, v)$

が作る実4次空間となる。しかし4次空間を表現することは困難であるため、4変数x, y, u, vのうち3変数を用いた3次元曲面として描画する。

4．描画結果及び考察

Mathematica及びVRML表示による初等超越関数の3次元曲面の描画結果を以下に示す。左端の図はMathematicaによる静的な描画結果であり、中央及び右端の図はVRMLによる動的な描画結果である。

(1) 指数関数e^z

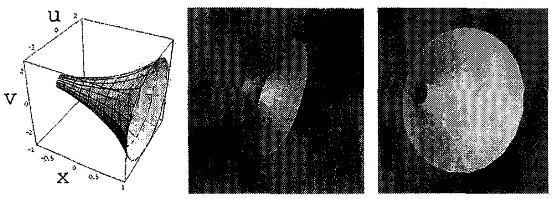

図4　パラメータ $\{x, u, v\}$

図4はe^zに$\cos y$, $\sin y$が乗じることにより、特徴的なラッパ形状を呈する。

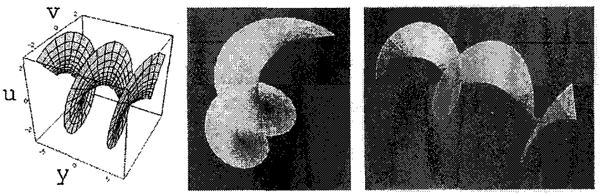

図5　パラメータ $\{y, v, u\}$

図5は中心点（特異点）を含んで一周（2π）すると、同一点に戻ることなく、2π移動する螺旋形状を呈する。

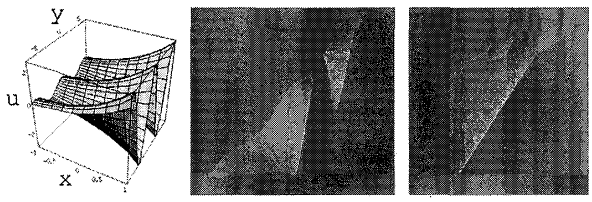

図6　パラメータ $\{x, y, u\}$

図6は三角関数の波状が表現されており、実関数の場合は三角関数と何の関わりもない関数であるが、複素数に拡張すると、表1及び図6のように三角関数と密接な関係があることが確認できる。

(2) 三角関数$\cos z$

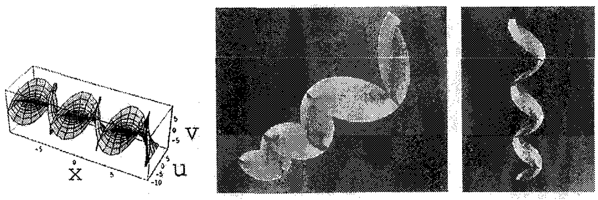

図7　パラメータ $\{x, u, v\}$

図7は特異点の存在が確認でき、特異点を含んで曲面上を移動すると同一点に戻らない特性を呈する。

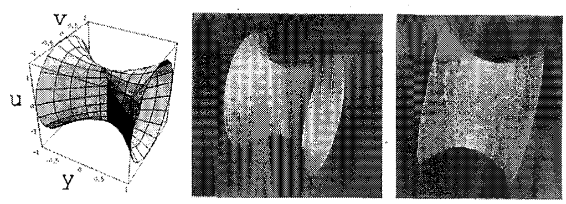

図8　パラメータ $\{y, v, u\}$

図8は虚軸（y軸）に沿って無限遠点に近づけば$u, v\to\infty$となり、u, vで構成される$\cos z$は∞となる。

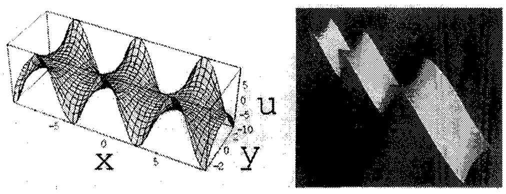

図９　パラメータ $\{x, y, u\}$

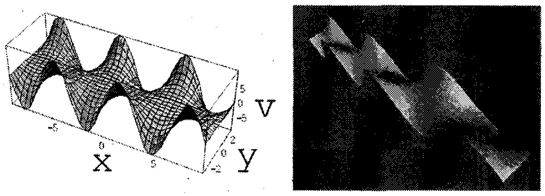

図10　パラメータ $\{x, y, v\}$

図９、図10は $\cos z$ の実数曲面及び虚数曲面を描画したものであるが、x 軸上（実軸）では三角関数 $\cos x$、$\sin x$ の形状を示し、y 軸上（虚軸）では双曲線関数 $\cosh y$、$\sinh y$ の形状を呈していることが確認できる。

(3)　対数関数 $\log z$

対数関数は指数関数の逆関数であり、実関数と同様に密接な関係がある。また対数関数の特性は、実数曲面及び虚数曲面ともに特異点が存在し、対数関数の多価性は虚数曲面の周期性より確認できる。

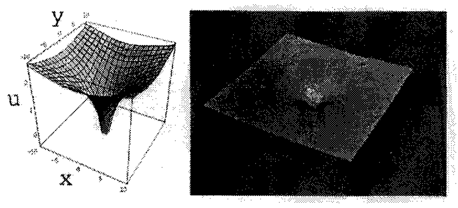

図11　パラメータ $\{x, y, u\}$

図11は対数関数の実数曲面を描画した図であり、原点で負の無限大となる特異点を呈する。また指数関数の図４に見られるラッパ形状に似ており、対数関数と指数関数の関わりも確認できる。

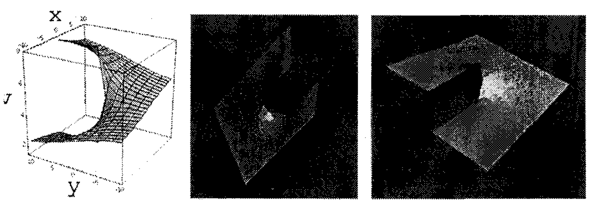

図12　パラメータ $\{x, y, v\}$

図12は対数関数の虚数曲面を描画した図であり、指数関数の図５の曲面と同様に中心点を含んで一周（2π）したとき、同一点に戻るのではなく、2π 移動する螺旋形状を呈する。

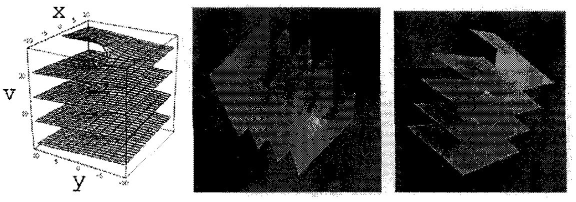

図13　パラメータ $\{x, y, v\}$ Riemann面

図13は図12の虚数曲面を４枚連ねたもの（プログラムでは何枚でも描画することは可能）であり、曲面を一つの直線で貫いた場合、無数の交点が発生する(無限多価性)。このように複数の値を取り得る関数において、複数の平面を用いて表現するのではなく、一枚の曲面で表現することができる曲面をRiemann面（１次元複素多様体）といい、このような関数を無限多価関数という。

５．まとめ

近年目覚ましく発展したインターネット上において、Web３D表現の一つであるVRMLを取り入れてインタラクティブな３次元表現を可能にする手法を提案した。具体的にはサーフェースモデル作成に係る３次元物体の情報に関して、Mathematicaを用いて選出し、VRMLに対応するノードへ変換する一連の手順をサブルーチン内で実現するプログラムを作成したことである。それぞれの曲面において数枚の描画例からその有用性を呈示することは困難であるが、ホームページ上に公開することにより、学習者がVRML上に描画された曲面を自由に観察することも可能となり、イメージされ難い複素関数の体験学習の効果も発揮されよう。また、同時に不特定多数の人から、様々な意見や提案を集約することができるものと期待される。したがって、本研究で取り上げた題材・教材目的に限定することなく、VRMLの特徴・利点を活かして

体験学習教材としての今後の活用用途、さらには著者らが研究している工学分野への発展・展開など、 VRMLの活用性を広く見い出すことが今後の検討課題であろう。

[註]

(1) 所属は、新城市役所
(2) 所属は、名城大学理工学部

参考文献

(1) VRML、ISO/IEC 14772 (1997).
(2) 田中成典、小林孝史、南佳孝、et al.：“Web工房シリーズ VRMLの達人”、森北出版 (1999).
(3) K.Fujii、S.Duan and K.Nakagawa：“A Mathematical Model for Fracture Process of Four Point Bending Concrete Beam”、Engineering Fracture Mechanics、Vol.40、No.1、pp.37-44 (1991).
(4) 殿塚勲・河村哲也：“理工系の複素関数論”、東京大学出版会 (1999).
(5) 上坂吉則：“数値数式プログラミング”、牧野書店、(2000).
(6) *http://www.sgi.co.jp/*
(7) 黒瀬能聿：“3次元図形処理工学”、共立出版株式会社、pp. 2-5 (1999).